تابع چگالی حاشیه‌ای یا کناری :

با داشتن تابع چگالی احتمال توام متغیرهای تصادفی X و Y می‌توان تابع چگالی احتمال X به تنهایی و Y به تنهایی را محاسبه کرد؟

آن‌ها توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای نامیده می‌شوند و با فرمول‌های ذیل محاسبه می‌گردد :

در حالت گسسته : $\longleftarrow$ $f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y)$, $f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y)$

در حالت پیوسته : $\longleftarrow$ $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$ $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$

مثال : در مثال مربوط به انتخاب توپهای آبی --- و توپهای قرمز مشاهده شده از داخل جعبه (ص ۳۴ جزوه)

مطلوبست نوشتن تابع احتمال حاشیه ای X و تابع احتمال حاشیه‌ای Y

$S_X = \{0,1,2\}$ $S_Y = \{0,1,2\}$

$\uparrow f_X(x) = \sum_{y=0}^{2} f_{X,Y}(x,y)$

$\begin{cases} f_X(0) = f_{X,Y}(0,y) = f_{X,Y}(0,0) + f_{X,Y}(0,1) + f_{X,Y}(0,2) = 6/36 + 8/36 + 1/36 = 15/36 \\ f_X(1) = f_{X,Y}(1,y) = f_{X,Y}(1,0) + f_{X,Y}(1,1) + f_{X,Y}(1,2) = 12/36 + 6/36 = 18/36 \\ f_X(2) = f_{X,Y}(2,y) = f_{X,Y}(2,0) + f_{X,Y}(2,1) + f_{X,Y}(2,2) = 3/36 \end{cases}$

Y \ X	0	1	2	$f_Y(y)$
0	$6/36$	$12/36$	$3/36$	$21/36$
1	$8/36$	$6/36$	0	$14/36$
2	$1/36$	0	0	$1/36$
$f_X(x)$	$15/36$	$18/36$	$3/36$	

مثال در کلاس انجام شد.

((سایر مثالها در جزوه تهران ص 143 کتاب))

توزیع احتمال شرطی :

اگر X و Y دو متغیر تصادفی گسسته با توزیع احتمال توام $f_{X,Y}(x,y)$ و توزیع‌های حاشیه‌ای $f_X(x)$, $f_Y(y)$

Scanned with CamScanner

باشیم، توزیع احتمال شرطی متغیر تصادفی Y در صورتی که $X=x$ داده شده باشد، عبارت است از:

$$f_{Y/x}(y/x) = \frac{f_{x,Y}(x,y)}{f_X(x)} \quad , \quad f_X(x) > 0$$

و بطور مشابه، توزیع احتمال شرطی متغیر تصادفی X در صورتی که $Y=y$ داده شده باشد:

$$f_{x|Y}(x/y) = \frac{f_{x,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \qquad f_Y(y) > 0$$

اگر تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y و توزیع حاشیه‌ای متغیر تصادفی X مشخص باشد، توزیع چگالی شرطی متغیر تصادفی Y به شرط آنکه $X=x$ داده شده باشد عبارت است از:

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{x,Y}(x,y)}{f_X(x)} \qquad f_X(x) > 0$$

و بطور مشابه اگر توزیع حاشیه‌ای متغیر تصادفی Y مشخص باشد:

$$f_{x|Y}(x|y) = \frac{f_{x,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \qquad f_Y(y) > 0$$

$$P(a < Y < b \mid X=c) = \int_a^b f_{x,Y}(y \mid x=c)\,dy$$

$$P(a < x < b \mid Y=d) = \int_a^b f_{x,Y}(x \mid y=d)\,dx$$

مثال: در مثال قبل، مطلوبست تابع احتمال شرطی X به شرط $Y=0$ و $P(X \le 1 \mid Y=0)$

مثال اضافه ص ۱۴۶ کتاب

$$f_{x/Y}(x/0) = \frac{f_{x,Y}(x,0)}{f_Y(0)} = \frac{f_{x,Y}(x,0)}{21/36} = \frac{36}{21} f_{x,Y}(x,0) \qquad x = 0,1,2$$

X	0	1
$f_{x,Y}(x/0)$	$\frac{36}{21} \times \frac{6}{36} = \frac{6}{21}$	$\frac{36}{21} \times \frac{12}{36} = \frac{12}{21}$

$$P(X \le 1 \mid Y=0) = \sum_{x=0}^{1} f_{x/Y}(x/0) = \frac{6}{21} + \frac{12}{21} = \frac{18}{21}$$

$$P(X \le 1 \mid y=0) = \frac{18/36}{21/36} = \frac{18}{21}$$

$$f_{X/Y}(x \le 1 \mid y=0) = \frac{f_{x,Y}(x \le 1, y=0)}{f_Y(0)} = \frac{18/36}{21/36} = \frac{18}{21}$$

$f_{x,Y}(x=1,y=0)$

Scanned with CamScanner

مثال: در تابع توزیع احتمال توام زیر مطلوبست می‌کنیم توابع چگالی احتمال $f_{X|Y}(x|y)$ ، $f_Y(y)$ ، $f_X(x)$

حسن $P(1<x<2 \mid Y=\frac{1}{2})$ را نیز می‌خواهیم بدست آوریم

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{9}x(1+2y) & 0<x<3\ ,\ 0<y<1\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy=\int_0^1 \frac{1}{9}x(1+2y)dy=\frac{1}{9}x(y+y^2)\Big|_0^1=\frac{2}{9}x$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx=\int_0^3 \frac{1}{9}x(1+2y)=\frac{1}{9}(1+2y)\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^3=\frac{1}{2}(1+2y)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{9}x & 0<x<3\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+2y) & 0<y<1\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{9}x(1+2y)}{\frac{1}{2}(1+2y)}=\frac{2}{9}x \rightarrow f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{9}x & 0<x<3\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$$

$$P(1<x<2 \mid y=\tfrac{1}{2})=\int_1^2 f_{X,Y}(x/\tfrac{1}{2})dx=\int_1^2 \frac{2}{9}x\,dx \Rightarrow \frac{1}{9}x^2\Big|_1^2=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

مثال: اگر X و Y دارای تابع چگالی احتمال توام زیر باشد:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{4}+xy & 0<x<1\ ,\ 0<y<1\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$$

مطلوبست می‌کنیم: الف) $f_{Y/X}(y/x)$ ب) $P(Y>\frac{1}{2} \mid X=\frac{1}{2})$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y,X}(y/x)=\int_0^1 \left(\frac{3}{4}+xy\right)dy=\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}xy^2\Big|_0^1=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}x$$

$$f_{Y|X}(y/x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{3+4xy}{4}}{\frac{3+2x}{4}} \Rightarrow f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{3+4xy}{3+2x} & 0<y<1\\ 0 & \text{در سایر نقاط}\end{cases}$$

$$P(Y>\tfrac{1}{2} \mid X=\tfrac{1}{2})=\int_{1/2}^{+\infty} f_{Y/X}(y/\tfrac{1}{2})dy=\int_{1/2}^{1}(3+2y)dy=(3y+y^2)\Big|_{1/2}^1=4-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=4-\frac{6+1}{4}=\frac{16-7}{4}=\frac{9}{4}$$

Scanned with CamScanner

مثال : اگر X و Y دارای تابع چگالی احتمال توام زیر باشند :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy & 0 \le y \le x \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

مطلوبست محاسبه : الف) $f_X(x)$ ، $f_Y(y)$ ب) $f_{X/Y}(x/y)$ ، $f_{Y/X}(y/x)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^x 8xy\,dy = \begin{cases} 4x^3 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_y^1 8xy\,dx = \begin{cases} 4y(1-y^2) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{4y(1-y^2)} = \begin{cases} \frac{2x}{(1-y^2)} & 1 \ge x \ge y \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{Y/X}(y/x)}{f_X(x)} = \frac{f_{Y/X}(y/x)}{4x^3} = \begin{cases} 2y/x^2 & x > y > 0 \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

متغیرهای تصادفی مستقل :

می دانیم دو رویداد A و B مستقل $\Leftarrow$ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ و یا $P(A/B) = P(A)$

در این صورت هرگاه متغیر تصادفی Y تأثیری روی متغیر تصادفی X نداشته باشد می گوئیم این دو متغیر تصادفی مستقل از یکدیگرند

می باشند و لذا

$$f_{X/Y}(x/y) = f_X(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = f_X(x) = \cdot f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای یا توابع چگالی احتمال توام متغیرهای تصادفی X و Y

بنابراین متغیرهای تصادفی مستقل X و Y را از لحاظ آماری مستقل گوئیم اگر و فقط اگر

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$$ برای همه x و y ها

Scanned with CamScanner

مثال: در مثال های ذیل آیا متغیری مستقل اند؟ چرا

x / y	1	2	3	$f_{Y(y)}$
5	0.15	0.3	0.05	0.5
6	0.9	0.18	0.03	0.3
7	0.06	0.12	0.02	0.2
$f_{X(x)}$	0.3	0.6	1	1

$\forall(x,y): f_{X,Y(x,y)} = f_{X(x)} \cdot f_{Y(y)}$

$f_{X,Y(1,5)} = f_{X(1)} \cdot f_{Y(5)}$

$0.15 = 0.3 \cdot 0.5$

$0.15 = 0.15$

پس مستقل اند

y / x	1	2	$f_{Y(y)}$
4	0.18	0.42	0.3
7	0.12	0.28	0.7
$f_{X(x)}$	0.6	0.4	1

$\forall(x,y): f_{X,Y(x,y)} = f_{X(x)} \cdot f_{Y(y)}$

$f_{X,Y(2,4)} = f_{X(2)} \cdot f_{Y(4)}$

$0.42 = 0.4 \quad 0.3$

پس مستقل نیستند

مثال: اگر دو متغیر تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال ذیل باشند، آیا از لحاظ آماری مستقل هستند؟

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}x(1+3y^2) & 0<x<2 \quad 0<y<1 \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \frac{1}{4}\int_0^1 x(1+3y^2)\,dy \longleftarrow 0<x<2 \text{ برای}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (x+3xy^2)\,dy = \frac{1}{4}\left(xy+\frac{3}{3}xy^3\right)\Big|_0^1 = x/2 \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} x/2 & 0<x<2 \\ 0 & \text{b.t} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{4}\int_0^2 x(1+3y^2)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x+3xy^2 = \frac{1}{4}\left(x^2/2+\frac{3}{2}x^2y^2\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(1+3y^2)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+3y^2) & 0<y<1 \\ 0 & \end{cases}$$

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) = \begin{cases} x/2 \times 1/2(1+3y^2) & 0<x<2 \quad 0<y<1 \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ از لحاظ آماری مستقل هستند.

Scanned with CamScanner

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y) \qquad (۲)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \qquad (۳)$$

در حالت پیوسته

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx \qquad (۴)$$

$f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را **توزیع‌های حاشیه‌ای** X و Y می‌نامیم.

توجه: علت این که این توزیع‌های حاشیه‌ای دقیقاً توزیع هر یک از متغیرهای X و Y را نشان می‌دهند، به سادگی قابل تحقیق است، به‌عنوان مثال در حالت پیوسته برای تابع $f_X(x)$ خصوصیات تابع چگالی احتمال را بررسی می‌کنیم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \Big) dx = ۱$$

$$P(a < X < b) = P(a < X < b, -\infty < Y < \infty)$$

$$= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_a^b f_X(x)dx$$

مثال ۱۷.۴. فرض کنید X و Y دارای توزیع احتمال توأم زیر باشند، توزیع‌های حاشیه‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را بنویسید.

y \ x	۲	۴
۱	۰٫۱	۰٫۱۵
۲	۰٫۲	۰٫۳
۳	۰٫۱	۰٫۱۵

حل: با توجه به فرمول‌های (۱) و (۲) داریم:

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(x,۱) + f_{X,Y}(x,۲) + f_{X,Y}(x,۳)$$

و چون x مقادیر ۲ و ۴ را اختیار می‌کند، پس

$$f_X(۲) = f_{X,Y}(۲,۱) + f_{X,Y}(۲,۲) + f_{X,Y}(۲,۳) = ۰٫۱ + ۰٫۲ + ۰٫۱ = ۰٫۴$$

$$f_X(۴) = f_{X,Y}(۴,۱) + f_{X,Y}(۴,۲) + f_{X,Y}(۴,۳) = ۰٫۱۵ + ۰٫۳ + ۰٫۱۵ = ۰٫۶$$

توزیع $f_X(x)$ را به‌صورت جدول نیز می‌توان نشان داد:

Scanned with CamScanner

x	۲	۴
$f_X(x)$	۰٫۴	۰٫۶

و به همین ترتیب

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(۲,y) + f_{X,Y}(۴,y)$$

و چون y مقادیر ۱، ۲، ۳ را اختیار می‌کند، پس

$$f_Y(۱) = f_{X,Y}(۲,۱) + f_{X,Y}(۴,۱) = ۰٫۱ + ۰٫۱۵ = ۰٫۲۵$$
$$f_Y(۲) = f_{X,Y}(۲,۲) + f_{X,Y}(۴,۲) = ۰٫۲ + ۰٫۳ = ۰٫۵$$
$$f_Y(۳) = f_{X,Y}(۲,۳) + f_{X,Y}(۴,۳) = ۰٫۱ + ۰٫۱۵ = ۰٫۲۵$$

و توزیع $f_Y(y)$ به صورت جدول زیر نوشته می‌شود.

y	۱	۲	۳
$f_Y(y)$	۰٫۲۵	۰٫۵	۰٫۲۵

توزیع احتمال توأم و توزیع‌های حاشیه‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را به‌صورت یک جدول نیز می‌توان نشان داد. جدول زیر $f_{X,Y}(x,y)$ ، $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ را به‌طور هم‌زمان نشان می‌دهد و همان‌طورکه ملاحظه می‌کنید، توزیع‌های $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ در حاشیه جدول دیده می‌شوند و در واقع علت چنین نام‌گذاری ناشی از همین موضوع است.

y \ x	۲	۴	$f_Y(y)$
۱	۰٫۱	۰٫۱۵	۰٫۲۵
۲	۰٫۲	۰٫۳	۰٫۵
۳	۰٫۱	۰٫۱۵	۰٫۲۵
$f_X(x)$	۰٫۴	۰٫۶	۱

□

مثال ۱۸.۴. اگر $f_{X,Y}(x;y)$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد، مطلوب است محاسبه $f_X(x)$ و $f_Y(y)$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{۱}{۹۶}xy & , \quad ۰ < x < ۴ \;,\; ۱ < y < ۵ \\ ۰ & , \quad \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

حل: با استفاده از فرمول‌های (۳) و (۴) داریم:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \frac{۱}{۹۶}\int_{۱}^{۵} xydy = \frac{۱}{۱۹۲}xy^۲\Big|_{۱}^{۵} = \frac{x}{۸}$$

Scanned with CamScanner

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & , \ 0 < x < 4 \\ 0 & , \ \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

و

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \frac{1}{96}\int_0^4 xydx = \frac{1}{192}yx^2\Big|_0^4 = \frac{y}{12}$$

به‌طور مشابه

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{12} & , \ 1 < y < 5 \\ 0 & , \ \text{در سایر نقاط} \end{cases} \quad \square$$

و

در مثال زیر نشان می‌دهیم که دانستن $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ در حکم دانستن $f_{X,Y}(x,y)$ نیست.

مثال ۱۹.۴. جعبه‌ای محتوی ۳ مهره است با شماره‌های ۱ و ۲ و ۳، از این جعبه ۲ مهره را به‌تصادف و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده عدد روی مهره اول و متغیر تصادفی Y نشان دهنده عدد روی مهره دوم باشد، جدول توزیع احتمال توأم X و Y و توزیع‌های حاشیه‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ به‌صورت جدول زیر بیان می‌شوند.

y \ x	۱	۲	۳	$f_Y(y)$
۱	۰	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
۲	$\frac{1}{6}$	۰	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
۳	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	۰	$\frac{1}{3}$
$f_X(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

حال اگر آزمایش را با جای‌گذاری انجام دهیم، داریم:

y \ x	۱	۲	۳	$f_Y(y)$
۱	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
۲	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
۳	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
$f_X(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

Scanned with CamScanner

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) > ۰ \tag{۷}$$

و به‌طور مشابه، اگر توزیع حاشیه‌ای متغیر تصادفی Y مشخص باشد.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > ۰ \tag{۸}$$

توجه: احتمال این که متغیر تصادفی پیوسته Y بین a و b قرارگیرد هنگامی‌که بدانیم $X = x$ است عبارت است از

$$P(a < Y < b|X = x) = \int_a^b f_{Y|X}(y|x)dy \tag{۹}$$

مثال ۴.۲۰. اگر X و Y دارای توزیع احتمال توأم زیر باشند، مطلوب است محاسبه:

$P(Y = ۳|X = ۲) = f_{Y|X}(۳|۲)$ و $f_{Y|X}(y|۲)$

y \ x	۱	۲	۳
۱	۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۱۲}$
۲	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۹}$	۰
۳	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۱۸}$

حل: ابتدا $f_X(۲)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f_X(۲) = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱۹}{۳۶}$$

با توجه به فرمول (۵) داریم:

$$f_{Y|X}(y|۲) = \frac{f_{X,Y}(۲,y)}{f_X(۲)} = \frac{۳۶}{۱۹} f_{X,Y}(۲,y) \quad \text{و} \quad y = ۱,۲,۳$$

بنابراین

y	۱	۲	۳
$f_{Y|X}(y|۲)$	$\frac{۶}{۱۹}$	$\frac{۴}{۱۹}$	$\frac{۹}{۱۹}$

Scanned with CamScanner

$$f_{Y|X}(۳|۲) = \frac{۳۶}{۱۹} f_{X,Y}(۲,۳) = \frac{۳۶}{۱۹} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۱۹} \quad \square$$

مثال ۲۱.۴. اگر X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{۳}{۴} + xy & ,\ ۰ < x < ۱,\ ۰ < y < ۱ \\ ۰ & ,\ \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه: الف) $f_{Y|X}(y|x)$ ب) $P(Y > \frac{۱}{۲} | X = \frac{۱}{۲})$

حل: الف) با توجه به فرمول (۳) داریم:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{۰}^{۱} \left(\frac{۳}{۴} + xy\right)dy = \frac{۳}{۴} + \frac{x}{۲} \ ,\ ۰ < x < ۱$$

و با توجه به فرمول (۷) داریم:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{۳ + ۴xy}{۳ + ۲x} & ,\ ۰ < y < ۱ \\ ۰ & ,\ \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

توجه کنید که برای مقادیر x، خارج از فاصله (۱ و ۰)، تابع $f_{Y|X}(y|x)$ تعریف نمی‌شود.

$$P\left(Y > \frac{۱}{۲} | X = \frac{۱}{۲}\right) = \int_{۱/۲}^{\infty} f_{Y|X}(y|\frac{۱}{۲})dy = \int_{۱/۲}^{۱} \frac{۳ + ۲y}{۴} dy = \frac{۹}{۱۶} \quad \square$$

مثال ۲۲.۴. اگر X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ۸xy & ,\ ۰ \leqslant x \leqslant ۱\ ,\ ۰ \leqslant y \leqslant x \\ ۰ & ,\ \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه: الف) $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ ب) $f_{X|Y}(x|y)$ و $f_{Y|X}(y|x)$

حل: الف)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{۰}^{x} ۸xydy = \begin{cases} ۴x^۲ & ,\ ۰ < x < ۱ \\ ۰ & ,\ \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{y}^{۱} ۸xydx = \begin{cases} ۴y(۱ - y^۲) & ,\ ۰ < y < ۱ \\ ۰ & ,\ \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

فصل چهارم - امید ریاضی

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال (یا چگالی احتمال) $f(x)$ باشد، امید ریاضی X یا میانگین X به صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر X گسسته باشد $\quad E(X) = \sum x \cdot f_x(x)$

اگر X پیوسته باشد $\quad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x)\,dx$

مثال: فرض کنید نخواهیم 3 نفر از بین 5 کهنه و 3 تکنیسین انتخاب کنیم. امید ریاضی تعداد کهنه‌های انتخابی در بین این 3 نفر را بدست آورید.

X = تعداد کهنه‌های انتخابی در بین 3 نفر انتخاب شده $\Leftarrow \quad S_X = \{0, 1, 2, 3\}$

$$f_{X(x)} = P(X=x) = \frac{\binom{5}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{8}{3}} \Rightarrow x = 0, 1, 2, 3$$

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$1/56$	$15/56$	$30/56$	$10/56$

$$\Rightarrow \mu_x = E(X) = \sum_{x=0}^{3} x_i \cdot f(x_i)$$

$$= (0 \times 1/56) + (1 \times 15/56) + (2 \times 30/56) + (3 \times 10/56) = 105/56 \simeq 1.9$$

یعنی در بین 3 نفر انتخابی بطور متوسط 1.9 نفر آنان کهنه‌ها هستند.

مثال: مقدار ثابت c را طوری بیابید که تابع

$$f_x = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) یک تابع چگالی احتمال باشد ب) $P(1 < x < \frac{3}{2})$ ج) امید ریاضی

الف)
$$\int_0^2 cx^2\,dx = \frac{c}{3}x^3\Big|_0^2 = 1 \Rightarrow \frac{8c}{3} = 1 \Rightarrow c = 3/8$$

ب)
$$\int_1^{3/2} \frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{3}{8}\int_1^{3/2} x^2\,dx = \frac{1}{8}x^3\Big|_1^{3/2} = 19/64$$

ج)
$$E(x) = \int_0^2 x \cdot \frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^3\,dx = \frac{3}{32}x^4\Big|_0^2 = 3/2$$

Scanned with CamScanner

مثال: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} a+bx^2 & 0<x<1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

اگر $E(X) = 3/5$ باشد مقادیر a و b و تابع توزیع تجمعی X را بدست آورید

برای بدست آوردن مقادیر a و b باید دو شرط ذیل را برقرار کنیم:

شرط اول:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^1 (a+bx^2)\,dx = ax + \frac{b}{3}x^3 \Big|_0^1 = a + b/3$$

شرط دوم:

$$3/5 = E(X) = \int_0^1 x(a+bx^2)\,dx = 1/2\,ax^2 + \frac{1}{4}bx^4 \Big|_0^1 = 3/5$$

$$a/2 + b/4 = 3/5$$

$$-1/2 \begin{cases} a+b/3 = 1 \\ a/2 + b/4 = 3/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1/2\,a - b/6 = -1/2 \\ 1/2\,a + b/4 = 3/5 \end{cases} \qquad b/4 - b/6 = 3/5 - 1/2$$

$$\frac{3b-2b}{12} = \frac{6-5}{10} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{1}{10} \Rightarrow b = 6/5$$

$$a + 6/5\,(1/3) = 1 \Rightarrow a + 6/15 = 1 \Rightarrow a = 9/15 = 3/5$$

$$F_X(x) = \int_0^x (3/5 + 6/5\,x^2)\,dx \Rightarrow F_X(x) = 3/5\,x + 2/5\,x^3 \Big|_0^x = 3/5\,x + 2/5\,x^3$$

بنابراین تابع توزیع تجمعی X برابر است با:

$$F_X(x) \begin{cases} 0 & x<0 \\ 3/5 + 2/5\,x^3 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

مثال: شخصی می‌خواهد اتوبوس خود را به مبلغ ده میلیون تومان بیمه کند. شرکت بیمه با توجه به تجربیات قبلی خود در مورد حوادث اتوبوسهای می‌داند که کل مبلغ اتوبوس را با احتمال 1/1000 و نصف آن را با احتمال 1/100 و ربع آن را با احتمال 1/10 باید بپردازد. برای سه مورد بیمه مبلغی را نمی‌پردازد. شرکت بیمه چه حق بیمه‌ای را دریافت کند تا سودی معادل صد هزار تومان عاید شرکت بیمه شود در این نوع اتوبوسها؟

Scanned with CamScanner

تنغیر x عبارتست از : سانتی یا بابت حسابت بالا پیمه برداری

x_n	۱۰۱۰۰۰۰۰	۵۱۰۰۰۱۰۰۰	۲۱۵۰۰۱۰۰۰	•
$f(x)$	۱/۱۰۰۰	۱/۱۰۰	۱/۱۰	۱-(۱/۱۰۰۰+۱/۱۰۰+۱/۱۰)

$$E(x) = \sum x_n \cdot f(x) = ۱۰,۱۰۰۰ + ۵۰,۱۰۰۰ + ۲۵۰,۱۰۰۰ = ۴۱۰,۱۰۰۰$$

$$\text{حق بیمه} = ۴۱۰,۱۰۰۰ + ۱۰۰,۱۰۰۰ = ۴۱۰,۱۰۰۰$$

مثال :

کیت تاس سالم را آنقدر پرتاب کنیم تا ۶ یا 6 بیاید. امید ریاضی تعداد دفعات لازم برای پرتاب تاس را محاسبه کنید

تعداد دفعات لازم برای پرتاب تاس تا اعداد ۱ یا 6 بیاید X =

$X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

$X=1 \Rightarrow P(X=1) = 1/3$

$P(X=3) = 2/3 \times 2/3 \times 1/3$

$X=2 \Rightarrow P(X=2) = 2/3 \times 1/3$

$P(X=n) = (2/3)^{(n-1)} \times 1/3$

$$E(X) = \sum n \cdot (2/3)^{n-1} \cdot (1/3) = 1 \times 1/3 + 2 \times 2/9 + 3 \times 4/27 + \dots$$

طرفین را در $2/3$ ضرب کرده و سپس دو رابطه را از هم کم می‌کنیم

$$2/3\, E(X) = 2/9 + 2 \times 4/27 + 3 \times 8/81 + \dots$$

$$1/3\, E(X) = 1/3 + 2/9 + 4/27 + 8/81 + 16/243 + \dots = \frac{1/3}{1 - 2/3} = 1 \Rightarrow 1/3\, E(X) = 1 \Rightarrow E(X) = 3$$

امید ریاضی تابعی از یک یا چند متغیر تصادفی

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع احتمال $f_X(x)$ یا تابع جرمی احتمال $f_X(x)$ باشد. امید ریاضی هر تابع از X مانند $g(X)$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد :

اگر X گسسته باشد

$$E(g(x)) = \sum_x g(x) \cdot f_X(x)$$

اگر X پیوسته باشد

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$$

مثال : فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد :

Scanned with CamScanner

x	-1	0	1	2
$f_X(x)$	0.4	0.1	0.5	0.3

امید ریاضی تابع $g(X)=(X-1)^2$ را به دست آورید.

$$E((X-1)^2) = \sum_{x=-1}^{2} (x-1)^2 \cdot f_X(x)$$

$$= (-1-1)^2\cdot 0.1 + (0-1)^2\cdot 0.1 + (1-1)^2\cdot 0.5 + (2-1)^2\cdot 0.3 = 0.8$$

مثال: اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال به صورت زیر باشد، امید ریاضی $Y=X^2$ را به دست آورید:

$$f(x)=\begin{cases} 2(1-x) & 0<x<1 \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_0^1 2x^2(1-x)\,dx = 2\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = 2\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

مثال: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{3}{16}\sqrt{x} & 0<x<4 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

امید ریاضی $Y=5X-4$

$$E(5X-4) = \int_0^4 (5x-4)\tfrac{3}{16}\sqrt{x}\,dx = \tfrac{3}{16}\int_0^4 (5x^{3/2}-4x^{1/2})\,dx$$

$$= \tfrac{3}{16}\left(2x^{5/2}-\tfrac{8}{3}x^{3/2}\right)\Big|_0^4 = \tfrac{3}{16}\left(2\sqrt{x^5}-\tfrac{8}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_0^4 = \tfrac{3}{16}\left(64-\tfrac{64}{3}\right) = 8$$

اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع توزیع احتمال توام $f_{X,Y}(x,y)$ یا تابع چگالی احتمال توام $f_{X,Y}(x,y)$ باشند، امید ریاضی هر تابعی از X و Y مانند $g(X,Y)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر X و Y گسسته باشند

$$E(g(X,Y)) = \sum_x \sum_y g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)$$

اگر X و Y پیوسته باشند

$$E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Scanned with CamScanner

مثال: جعبه‌ای شامل 2 مهره سفید و 3 مهره سیاه است. اتفاقاً کسی از این جعبه انتخاب می‌کند و متغیر تصادفی X را برابر تعداد مهره‌های سفید در این دو مهره انتخاب شده در نظر می‌گیریم. پس از بازگشت مهره‌های جعبه دو مهره دیگر بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی Y را برابر تعداد مهره‌های سفید مشاهده شده در این دو مهره انتخاب شده در نظر می‌گیریم. تابع احتمال توام X و Y را به دست آورید و

$E(X^2Y)$ را بیابید.

$S_X = \{0,1\}$ $\quad S_Y = \{0,1,2\}$

$$f_{X,Y}(0,0) = P(X=0, Y=0) = P(X=0)P(Y=0/X=0) = \frac{3}{5} \times \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{30} = 0.1$$

$$f_{X,Y}(1,0) = P(X=1, Y=0) = P(X=1)P(Y=0/X=1) = \frac{2}{5} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{6}{30} = 0.2$$

Y \ X	0	1	$f_{Y(y)}$
0	0.1	0.2	0.3
1	0.4	0.2	0.6
2	0.1	0	0.1
$f_{X(x)}$	0.6	0.4	1

$$E(x^2y) = \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{2} x^2 y f_{X,Y}(x,y)$$
$$= 0(0.1) + 0(0.4) + 0(0.1) + 0(0.2)$$
$$+ 1(0.2)(1\times 2)(0) = \boxed{0.2}$$

مثال: تابع احتمال توام زیر را در نظر بگیرید:

Y \ X	-1	0	1	$f_{Y(y)}$
4	1/6	2/6	1/6	4/6
9	0	1/6	1/6	2/6
$f_{X(x)}$	1/6	3/6	3/6	1

مطلوبست:

$3/6 = 1/2$

الف) $E(X^2) = \sum_{x=-1}^{1} x^2 f(x) = (-1)^2 \times 1/6 + (0)^2 \times 3/6 + (1)^2 \times 2/6 = (-1^2)(1/6) + (0^2)(3/6) + (1^2)(2/6) =$

ب) $E(\sqrt{y}) = \sum \sqrt{y} \cdot f(y) = \sqrt{4} \times 4/6 + \sqrt{9} \times 2/6 = 8/6 + 6/6 = 14/6$

ج) $E(x^2y) = \sum_x \sum_y x^2 y f(x,y) = (-1)^2 \times 4 \times 1/6 + (0)^2(4)(2/6) + (1)^2(4)(1/6) +$

$(-1)^2(9)(0) + (0)^2(9)(1/6) + (1)^2(9)(1/6) = 4/6 + 0 + 4/6 + 9/6 = 17/6$

Scanned with CamScanner

مثال: فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توام ذیل باشند:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 16y/x^3 & x>2 \quad 0<y<1 \\ 0 & \end{cases}$$

مطلوبست:

الف) $E(XY) = \int_2^{+\infty}\int_0^1 xy\,\frac{16y}{x^3}\,dx\,dy = 16\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^1 dx$

$= \frac{16}{3}\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \frac{16}{3}\left(-\frac{1}{x}\right)_2^{+\infty} = \frac{16}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{8}{3}$

ب) $E\left(\frac{X+1}{Y}\right) = \int_2^{+\infty}\int_0^1 \left(\frac{x+1}{y}\right)\left(\frac{16y}{x^3}\right)dx\,dy = 16\int_2^{+\infty}\frac{x+1}{x^3}\left(\int_0^1 dy\right)dx$

$16\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx = 16\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_2^{+\infty} = 16\left(0+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)\right) = 10$

اگر X و Y گسسته باشند:

$$E(X) = \sum_x\sum_y x\cdot f_{X,Y}(x,y),\quad E(Y) = \sum_x\sum_y y\cdot f_{X,Y}(x,y)$$

اگر X و Y پیوسته باشند:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

مثال: اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال توام ذیل باشند امید ریاضی X و امید ریاضی Y را محاسبه کنید:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0<x<y \quad 0<y<1 \\ 0 & \text{در سایر نقاط} \end{cases}$$

س ۱۰ ص ۱۱۱ کتاب

الف) $E(X) = \int_0^1\int_0^y x\,f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = 2\int_0^1\int_0^y x\,dx\,dy = 2\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^y dy$

$= 2\int_0^1\frac{1}{2}y^2\,dy = \int_0^1 y^2 dy = \left(\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

ب) $E(Y) = \int_0^1\int_0^y 2y\,dx\,dy = \int_0^1 y(2x)\Big|_0^y dy = 2\int_0^1 y^2 dy = 2\left(\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

$E(Y) = \int_0^1 2y(x)\Big|_0^y dy = \int_0^1 2y(y)\,dy = \frac{2}{3}y^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

Scanned with CamScanner